Sandsynlighed/binominalfordeling

I dag blev jeg stillet en relativ simpel opgave i sandsynlighedsregning. En ven ville vide hvad, sandsynligheden var for, at han i 5 uafhængige tenniskampe, hvor sandsynligheden for, at han vandt hver enkelt var 40%, ville vinde henholdsvis 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 kampe.

Vi har altså 5 uafhængige forsøg, dvs. n = 5.
Hernæst skal vi altså bestemme sandsynligheden, P(q), for at få præcist 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 sejre, dvs. q = 0, 1, 2, 3, 4, 5

Sandsynligheden for at få 0 (eller 5) sejre er således

$$\left(\frac{4}{10}\right)^5 \cong 1{,}024\%$$

Sandsynligheden for at få 2 sejre i de første 2 kampe og 3 nederlag i de sidste, altså 2 nederlag i alt, er således

$$\left(\frac{4}{10}\right)^2 * \left(\frac{6}{10}\right)^3 \cong 3{,}46\%$$

(vi ganger sandsynlighederne, da de er uaghængige af hinanden), men da, der er flere andre muligheder for at får 2 sejre (og 3 nederlag på), f.eks. nederlag-sejr-nederlag-sejr-nederlag), skal vi finde frem til, hvor mange gange 2 sejre kan forekomme i 5 kampe. Dette gøres ved brug af binominalkoefficienten, der udregner, hvor mange gange q kan fordele sig i n forsøg:

$$K_{n,q} = \binom{n}{q} = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}$$

Hvorfor der er $K_{n,q}$ kombinationer af 2 sejre (og derved 3 nederlag) i 5 kampe/forsøg.

$$K_{5,2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2! * 3!} = 10$$

Der er altså 10 forskellige kombinationer af 2 sejre i de 5 kampe. Vi fandt tidligere ud af, at der var 3,46% sandsynlighed for kombinationen sejr-sejr-nederlag-nederlag-nederlag, denne kombination er således en af vores 10 kombinationer. Vi skal derfor gange 3,46% med $K_{5,2}$

Nu kan vi let opstille regnestykkerne for henholdsvis 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 sejre:

$$P(q=0) = b\left(0; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{0} * \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cong 7{,}78\ \%$$

$$P(q=1) = b\left(1; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{1} * \left(\frac{4}{10}\right) * \left(\frac{6}{10}\right)^4 \cong 25{,}92\ \%$$

$$P(q=2) = b\left(2; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{2} * \left(\frac{4}{10}\right)^2 * \left(\frac{6}{10}\right)^3 \cong 34{,}56\ \%$$

$$P(q=3) = b\left(3; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{3} * \left(\frac{4}{10}\right)^3 * \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cong 23{,}04\ \%$$

$$P(q=4) = b\left(4; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{4} * \left(\frac{4}{10}\right)^4 * \left(\frac{6}{10}\right) \cong 7{,}68\ \%$$

$$P(q=5) = b\left(5; 5, \frac{4}{10}\right) = \binom{5}{5} * \left(\frac{4}{10}\right)^5 \cong 1{,}02\ \%$$